拡散過程の存在について (線型微分方程式の超局所解析)

AUTHOR(S):
平良, 和昭

CITATION:
平良, 和昭. 拡散過程の存在について (線型微分方程式の超局所解析). 数理解析研究所講究録 1979, 355: 72-87

ISSUE DATE:
1979-06

URL:
http://hdl.handle.net/2433/104459

数理解析研究所講究録
355巻 1979年 72-87

拡散過程の存在について

筑波大 数学系　　平良和昭

$\mathbb{R}^N$の有界領域 D で，与えられた拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t}-A$ (A は 2階の楕円型微分作用素) によって支配される拡散過程をすべて決定せよ，という問題について考える．詳細については近刊の [7] を参照されたい．

§1. 序

拡散過程 $\mathfrak{M}$ の"Markov 性"は，その遷移確率系 $\{p(t,x,dy)\}$ に対しては，Chapman-Kolmogorov の等式：

$$p(t+s,x,B)=\int_{\overline{D}} p(t,x,dy)\,p(s,y,B)$$

(B は $\overline{D}=D\cup\partial D$ の Borel 集合) として遺伝し，さらに，$p(t,x,dy)$ を積分核とする作用素 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を

$$T_t f(x)=\int_{\overline{D}} p(t,x,dy)\,f(y)$$

で定義すれば，半群の性質：$T_{t+s}=T_t\cdot T_s$ として遺伝する．このとき，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は，

$$0 \leqq f \leqq 1 \implies 0 \leqq T_t f \leqq 1$$

をみたすことに注意しよう.

逆に, 次の結果が知られている.

<u>定理 A</u>　$\{T_t\}_{t\geqq 0}$ が $C(\overline{D})$ 上の non-negative, contraction な半群であって, <u>$t=0$ で強連続</u>ならば, Markov 過程 $\mathfrak{M}$ が存在して, その遷移確率系 $\{p(t,x,dy)\}$ に対して

$$T_t f(x) = \int_{\overline{D}} p(t,x,dy)\, f(y)$$

が成立する.

<u>定義</u>　$C(\overline{D})$ 上の, $t=0$ で強連続, non-negative, contraction な半群 $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ を, $\overline{D}$ 上の <u>Feller 半群</u>という.

Hille - Yosida の半群の理論に依れば, 半群 $\{T_t\}$ はその生成作用素: $\mathfrak{A} f = \lim_{t\downarrow 0} (T_t f - f)/t$ によって特徴付けられる. 実際, 次の結果が知られている.

<u>定理 B</u>　i) $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ が $\overline{D}$ 上の Feller 半群ならば, その生成作用素 $\mathfrak{A}$ は次をみたす:

a)　定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ は $C(\overline{D})$ の dense な部分空間である.

b)　$\alpha > 0$ とする. 任意の $f \in C(\overline{D})$ に対して, $(\alpha - \mathfrak{A})u = f$ をみたす一意的な解 $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ が存在する.

c)　b) で $u = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1} f$ (Green 作用素) とおくと

$$\|(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}\| \leqq \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

d)　$f \geqq 0 \implies (\alpha - \mathfrak{A})^{-1} f \geqq 0$.

ii) 逆に，$\mathfrak{A}$ が a) をみたす $C(\overline{D})$ 上の線型作用素であって，ある α_0 が存在して，$\alpha > \alpha_0$ なるすべての α に対して b)〜d) が成立すれば，$\mathfrak{A}$ は $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成する．

われわれは拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t} - A$ を固定して考えるので，$\mathfrak{A}$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ を調べることに帰着される．このことについて，より詳しくのべよう．以下，$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \cap C^2(\overline{D})$ に対して

$$\mathfrak{A}u(x) = Au(x) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x), \quad x \in D$$

を仮定しよう．ただし

$$\begin{cases} a^{ij} \in C^\infty(\overline{D}); \quad a^{ij} = a^{ji}, \ \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i \xi_j > 0, \ \forall x \in \overline{D}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus 0, \\ b^i \in C^\infty(\overline{D}), \\ c \in C^\infty(\overline{D}); \quad c(x) \leqq 0 \ \text{ in } D. \end{cases}$$

このとき，Ventcel' は，u のみたす境界条件 L の具体的な形を与えた：

$$\begin{aligned} Lu(x) = & \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right] + \gamma(x)u(x) \\ & + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x) Au(x) + Tu(x) \\ = & \ 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

ここで，$(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ は境界 ∂D の局所座標であって，

$$\begin{cases} \alpha^{ij} = \alpha^{ji}; \quad \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geqq 0, \ \forall x \in \partial D, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus 0, \\ \mu(x) \geqq 0 \ \text{ on } \partial D; \quad \gamma(x) \leqq 0 \ \text{ on } \partial D; \quad \delta(x) \geqq 0 \ \text{ on } \partial D, \\ T \text{ は内部 } D \text{ から境界 } \partial D \text{ への積分作用素}, \end{cases}$$

さらに，n は (a^{ij}) に付随した（内向き）余法線ベクトルである．

<u>注意</u> 境界条件 L の各項の"確率論的意味"をのべる．$\mu\frac{\partial u}{\partial n}$ は n に沿っての境界での反射；γu は境界での吸収；δAu は（δ に比例する時間だけの）境界での停留；Tu は境界から内部へのジャンプ；$\sum_{i,j}\alpha^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_i \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ は境界上の拡散をそれぞれ表わしている．

以上のことをまとめると，粒子は，領域の内部では与えられた拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t}=A$ に支配されて運動し，境界では Ventcel' の境界条件 L に従って運動する，ことがわかる．

本稿の目的は，逆に，（微分作用素 A を固定しておいて）どのような Ventcel' の境界条件 L に対して，実際に $\bar{D}$ 上の拡散過程 $\mathfrak{M}$ が存在するか，という問題を考えることである．いいかえれば，粒子の<u>境界での挙動</u>によって拡散過程を特徴付けることである．

§2. 問題の定式化

§1 の事情を踏まえて，次の定義を導入しよう．

<u>定義</u> $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を Feller 半群とする．$\{T_t\}$ の生成作用素 $\mathfrak{A}$ が，$\mathfrak{A}u = Au$, $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ をみたすとき，半群 $\{T_t\}$ を<u>A-拡散過程</u>であるという．ここで，Au は Distribution の

意味でとる.

われわれは次の問題を考える.

問題 $\overline{D}$ 上の A-拡散過程 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ をすべて求めよ.

$N=1$ のときは, Feller, Dynkin, Itô-McKean, Ray によって完全に解決されているので, 以下, $N\geq 2$ とする.

上の問題を次の形で考察しよう.

問題' $C(\overline{D})$ 上の線型作用素 $\mathfrak{A}$ を

$$\mathfrak{A}u = Au, \quad u\in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C(\overline{D});\ Au\in C(\overline{D}),\ Lu=0\}$$

で定義する. このとき, Ventcel' の境界条件 L がどのような条件をみたせば, 作用素 $\mathfrak{A}$ が Feller 半群 (従って, A-拡散過程) $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を生成するか.

注意 $u\in C(\overline{D})$ で $Au\in C(\overline{D})$ ならば, 境界条件 Lu は Distribution の意味で存在する. 実際, $Lu\in H^{-5/2}(\partial D)$ であることが示せる.

§3. 一般的結果

簡単のため, 積分作用素 $T=0$, すなわち, 境界から内部へのジャンプはないとする. さらに, 境界条件 L の係数はすべて C^∞ とする. より詳しくのべると,

$$Lu(x) = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right] + \gamma(x)u(x)$$
$$+ \mu(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x)Au(x),$$

ただし

$$\begin{cases} \alpha^{ij} \in C^\infty(\partial D) \,;\; \alpha^{ij} = \alpha^{ji}, \; \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq 0, \; {}^\forall x \in \partial D, {}^\forall \xi \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus 0, \\ \beta^i \in C^\infty(\partial D), \\ \mu \in C^\infty(\partial D) \,;\; \mu(x) \geqq 0 \quad \text{on} \quad \partial D, \\ \gamma \in C^\infty(\partial D) \,;\; \gamma(x) \leqq 0 \quad \text{on} \quad \partial D, \\ \delta \in C^\infty(\partial D) \,;\; \delta(x) \geqq 0 \quad \text{on} \quad \partial D. \end{cases}$$

次の定義は本質的である．

定義　境界条件 L が，$\mu(x) + \delta(x) > 0$ on ∂D をみたすとき，L は Transversal であるという．

注意　境界条件 L が Transversal であるとは，内部 D の拡散過程と境界 ∂D 上の拡散過程とが"無関係"ではないことを意味する．より具体的に，偏微分方程式論の言葉でいえば，次の定理にでてくる境界値問題 $(*)$ が境界上の積分方程式に帰着できることを意味する．

さて，われわれの主結果は次の定理であり，[6] のひとつの拡張を与えている．

定理　Ventcel' の境界条件 L は Transversal とする．次を仮定する．

(I) ［解の存在］　ある $\lambda \geqq 0$ と $\alpha \geqq 0$ が存在して，$C(\partial D)$ のある dense な部分集合に属する任意の φ に対して，境界値問題：

$$(*) \begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ (\lambda - L)u = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

が $u \in C^2(\bar{D})$ なる解をもつ．

(II) ［解の一意性］ 任意の $\alpha > 0$ に対して，$u \in C(\bar{D})$ が

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ \qquad Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

をみたせば，$u \equiv 0$ である．

このとき，

$$\mathfrak{A}u = Au, \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C(\bar{D})\,;\, Au \in C(\bar{D}), Lu = 0\}$$

で定義される，$C(\bar{D})$ 上の線型作用素 $\mathfrak{A}$ は A-拡散過程 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成する．

<u>注意</u> 仮定(II)は解の正則性と密接な関係がある．実際，次の結果を示すことができる．

<u>系</u> Ventcel' の境界条件 L は Transversal とする．次を仮定する．

(I) 定理と同じとする．

(II)′ ［解の正則性］ 任意の $\alpha > 0$ に対して，$u \in C(\bar{D})$ が

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ \qquad Lu \in C^\infty(\partial D) \end{cases}$$

をみたせば，$u \in C^2(\bar{D})$ である．

このとき，定理と同じ結論を得る．さらに，作用素 $\mathfrak{A}$ は

$A\Big|_{\{u\in C^2(\overline{D})\,;\,Lu=0\}}$ の $C(\overline{D})$ における最小閉拡張と一致する.

§4. 具体的結果

仮定(I), (II) の境界値問題に対して, 解の存在, 一意性, 正則性を調べることにより, 以下の結果を得る.

<u>定理1</u> Ventcel' の境界条件 $Lu(x)=\left[\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)+\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right]$ $+\gamma(x)u(x)+\mu(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)-\delta(x)Au(x)$ $(u\in C^2(\overline{D}))$ が Transversal であって, 次をみたしているとする.

(A) $\Sigma=\{(x,\xi)\in T^*\partial D\setminus 0\,;\,|\xi|=1,\ q_2(x,\xi)\equiv\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j=0\}$ において

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\,H_{q_2}(x,\xi)+\mu(x)+\left(\sum_{i=1}^{N-1}\left(\beta^i(x)-\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x_j}(x)\right)\xi_i\right)\sqrt{-1}\neq 0.$$

ここで, $\widetilde{\mathrm{Tr}}\,H_{q_2}(x,\xi)$ は, $q_2(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ の (x,ξ) に関する Hessian $H_{q_2}(x,\xi)$ の Hamilton 写像の正の固有値の(重複度をこめた)和である.

このとき, 作用素 $A\Big|_{\{u\in C^2(\overline{D})\,;\,Lu=0\}}$ の $C(\overline{D})$ における最小閉拡張 $\mathfrak{A}$ が存在して, $\mathfrak{A}$ は A-拡散過程 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を生成する.

<u>注意</u> 定理で, $q_2(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j>0$, $\forall x\in\partial D$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\setminus 0$ の場合は, [1] で扱われた.

境界条件 L が1階の場合, すなわち, $\alpha^{ij}\equiv 0$ on ∂D のときは, $\beta=(\beta^1,\beta^2,\cdots,\beta^{N-1})$ が ∂D 上の<u>ベクトル場</u>であると

仮定して，より詳しく次の結果を得る．

<u>定理2</u>　Ventcel' の境界条件 $Lu(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)+\gamma(x)u(x)+\mu(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)-\delta(x)Au(x)$ $(u\in C^2(\bar{D}))$ が Transversal であって，次をみたしているとする．

(B)　定数 $C_0>0$ が存在して

$$\left|\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\xi_i\right|\leqq C_0\ \mu(x)\,|\xi|\quad \text{on}\quad T^*\partial D.$$

このとき，定理1と同じ結論を得る．

仮定(B)から，ベクトル場 $\beta=(\beta^1,\beta^2,\cdots,\beta^{N-1})$ は，$M=\{x\in\partial D;\ \mu(x)=0\}$ 上<u>2次で消える</u>ことが従うが，$\beta\neq 0$ on M の場合には，次の結果を得る．

<u>定理3</u>　Ventcel' の境界条件 $Lu(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)+\gamma(x)u(x)+\mu(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)-\delta(x)Au(x)$ $(u\in C^2(\bar{D}))$ が Transversal であって，次をみたしているとする．

(C)　ベクトル場 $\beta=(\beta^1,\beta^2,\cdots,\beta^{N-1})\neq 0$ on $M=\{x\in\partial D;\ \mu(x)=0\}$ で，β のいかなる極大な積分曲線も M に<u>完全には</u>含まれない．

このとき，定理1と同じ結論を得る．

<u>注意</u>　定理2，定理3で，$\mu(x)>0$ on ∂D の場合は，[1] で扱われた．

<u>注意</u>　条件 (A), (B), (C) の“確率論的”な意味付けを与えることは，(A), (B), (C) の必要性を調べるうえでも，重要な

ことと思われるが，完全には解明できていない。

§5. 証明のスケッチ

<u>§3 定理の証明</u>　[6] と殆んど同じなので，要点のみをのべよう．1° よく知られているように，任意の $\alpha \geq 0$ に対して，$G_\alpha^0 : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D})$，$H_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\overline{D})$ なる有界且非負な作用素が存在して，それぞれ次をみたす．

$$\begin{cases} (\alpha - A)\, G_\alpha^0 f = f & \text{in } D \quad (f \in C(\overline{D})), \\ G_\alpha^0 f|_{\partial D} = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha - A)\, H_\alpha \varphi = 0 & \text{in } D \quad (\varphi \in C(\partial D)), \\ H_\alpha \varphi|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

そこで，Ventcel' の境界条件 L に対して，線型作用素 $LG_\alpha^0 : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\partial D)$ を

$$LG_\alpha^0 f = L(G_\alpha^0 f),\ f \in \mathcal{D}(LG_\alpha^0) = \{ f \in C(\overline{D});\ G_\alpha^0 f \in C^2(\overline{D}) \}$$

で定義すると，LG_α^0 は非負且有界な作用素

$$\overline{LG_\alpha^0} : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\partial D)$$

に（一意的に）拡張される．同様に，線型作用素 $LH_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$ を

$$LH_\alpha \psi = L(H_\alpha \psi),\ \psi \in \mathcal{D}(LH_\alpha) = \{ \psi \in C(\partial D);\ H_\alpha \psi \in C^2(\overline{D}) \}$$

で定義すると，LH_α の最小閉拡張

$$\overline{LH_\alpha} : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

が存在する．

2° まず，仮定(I) が成り立っていれば，任意の $\alpha \geq 0$ に対して，作用素 $\overline{LH_\alpha}$ が ∂D 上の Feller 半群を生成することがわかり，さらに，境界条件 L が Transversal であれば，任意の $\alpha > 0$ に対して，逆作用素 $-\overline{LH_\alpha}^{-1}$ が存在して，非負且有界である．従って，任意の $\alpha > 0$ に対して，作用素

$$u = G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha \overline{LH_\alpha}^{-1}(\overline{LG_\alpha^0 f}),\ f \in C(\overline{D})$$

を定義することができる．このとき，$u = G_\alpha f$ は，

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

をみたす．すなわち，$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C(\overline{D});\ Au \in C(\overline{D}),\ Lu = 0\}$ であって，$(\alpha - \mathfrak{A})u = f$．仮定(II) から，一意性も従うので，$G_\alpha = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1}$ $(\alpha > 0)$ を得る．この G_α を使うと，[6] と殆んど同様にして，定理 B の条件 a) ～ d) がすべてみたされていることがいえて，作用素 $\mathfrak{A}$ は，$\overline{D}$ 上の Feller 半群の生成作用素となる．

<u>§3 系の証明</u>　1° まず，[仮定(I) + 仮定(II)′] $\Longrightarrow$ [仮定(I) + 仮定(II)] を示そう．任意の $\alpha > 0$ に対して，$u \in C(\overline{D})$ で

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

ならば，仮定 (II)′ から，$u \in C^2(\overline{D})$ が従う．よって，$\varphi = u|_{\partial D}$ とおけば，Dirichlet 問題の解の一意性から，$u = H_\alpha \varphi$ とかけて，$\varphi \in \mathcal{D}(LH_\alpha)$，$LH_\alpha \varphi = Lu = 0$ が従う．仮定 (I) が成り立っていて，境界条件 L が Transversal ならば，$\overline{LH_\alpha}$ は 1 to 1 になるので，$\varphi = 0$，すなわち，$u \equiv 0$ を得る．仮定 (II) がみたされていることがわかったので，定理から，作用素 $\mathfrak{A}$ は，$\overline{D}$ 上の Feller 半群の生成作用素である．

2° 次に，$\{G_\alpha f\,;\, f \in C^\infty(\overline{D})\} \subset \{u \in C^2(\overline{D})\,;\, Lu = 0\}$ を示す．$f \in C^\infty(\overline{D})$ ならば，$G_\alpha^0 f \in C^\infty(\overline{D})$，よって，$LG_\alpha^0 f \in C^\infty(\partial D)$ が従う．また，仮定 (II)′ から，$w = H_\alpha\left(\overline{LH_\alpha}^{-1}(LG_\alpha^0 f)\right)$ とおくと，

$$\begin{cases} (\alpha - A)w = 0 \quad \text{in } D, \\ \qquad Lw = LG_\alpha^0 f \in C^\infty(\partial D) \end{cases}$$

より，$w \in C^2(\overline{D})$ である．従って，

$$u = G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha\left(\overline{LH_\alpha}^{-1}(LG_\alpha^0 f)\right) \in C^2(\overline{D}).$$

3° 最後に，作用素 $\mathfrak{A}$ が，$A|_{\{u \in C^2(\overline{D})\,;\, Lu = 0\}}$ の $C(\overline{D})$ における最小閉拡張と一致することを示す．$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ とする．$f = (\alpha - A)u$ とおくと，$u = G_\alpha f$ であった．$\{f_j\} \subset C^\infty(\overline{D})$ を選んで，$f_j \longrightarrow f$ in $C(\overline{D})$ とできるので，$u_j = G_\alpha f_j$ とおくと，2° の結果から，$u_j \in C^2(\overline{D})$，$Lu_j = 0$．作用素 $G_\alpha : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D})$ は有界だったから，$u_j \longrightarrow u$

in $C(\overline{D})$, よって, $Au_j = \alpha u_j - f_j \longrightarrow \alpha u - f = Au$ in $C(\overline{D})$. 以上をまとめて,

$$\{(u, Au)\ ;\ u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})\}$$
$$= \{(u, Au)\ ;\ u \in C^2(\overline{D}),\ Lu = 0\} \text{ の } C(\overline{D}) \oplus C(\overline{D}) \text{ における閉包}$$

が示された.

<u>§4 定理1の証明</u>　1° 次の境界値問題の一意可解性について, "Sobolev空間" の枠内で考えよう.

$$(+)\ \begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ Lu = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここで, $\alpha \geqq 0$. そのために, Agmon-Nirenberg に示唆されて, 単位円 S^1 を<u>補助的</u>に導入して, (+) に付随して次の境界値問題を考える.

$$(\widetilde{+})\ \begin{cases} \left(A + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } D \times S^1 \ (y \in S^1), \\ L\tilde{u} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S^1. \end{cases}$$

すなわち, パラメーター α を, 単位円 S^1 上の2階の微分作用素に置き換えた. このとき, 粗くいって, 次のことを示すことができる ([8]):

『問題 (+) が, 十分大の $\alpha > 0$ に対して, 一意可解的であるための必要十分条件は, 問題 $(\widetilde{+})$ の Index が有限であることである』

さらに，このとき，任意の $\alpha \geqq 0$ に対して，問題（＋）の Index がゼロであることも従う．

2° 境界条件 L が Transversal で，仮定（A）が成り立っていれば，［2］の結果を使って，問題 $(\widetilde{+})$ の Index が有限であることが示せる．従って，1° の結果から，問題（＋）の Index はゼロである．さらに，このとき，$\alpha \geqq 0$ に対して，

$$(\alpha - A)u = 0 \ \text{in } D, \ Lu \in C^\infty(\partial D) \implies u \in C^\infty(\overline{D})$$

も示せるので，条件（II）′ がみたされていることがわかる．

一方，境界条件 L が Transversal ならば，任意の $\alpha > 0$ に対して，次の最大値の原理を得る：

$$u \in C^2(\overline{D}), \ (A - \alpha)u \geqq 0 \ \text{in } D, \ Lu \geqq 0 \ \text{on } \partial D \implies u \leqq 0 \ \text{on } \overline{D}.$$

これから，$\alpha > 0$ に対する問題（＋）の一意性が従う．

以上をまとめると，境界条件 L が Transversal で，仮定（A）が成り立っていれば，任意の $f \in C^\infty(\overline{D})$ と $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ に対して，問題（＋）が一意的な解 $u \in C^\infty(\overline{D})$ をもつことが従い，条件（I）が $\lambda = 0$ でみたされていることがわかる．§1 の系から，定理 1 を得る．

§4 定理 2，定理 3 の証明　定理 1 の場合と同様にして，それぞれ［2］と［5］の結果を使って，境界条件 L が Transversal であって，仮定（B）あるいは仮定（C）が成り立っていれば，条件（II）′ がみたされていることがわかる．さらに，

仮定(B)あるいは仮定(C)が成りたっていれば，任意の $f \in C^\infty(\overline{D})$ と $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ に対して，$\delta \equiv 0$ とした境界値問題

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ -\sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda - \delta)u - \mu \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

が，定数 $\lambda > 0$ に対して，一意的な解 $u \in C^\infty(\overline{D})$ をもつことが従い，"perturbation" によって，一般の $\delta \geqq 0$ に対しても，同じことがいえる．すなわち，条件(I)が $\lambda > 0$ に対してみたされていることが得られる．

REFERENCES

[1] J.-M. Bony, P. Courrège et P. Priouret, Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 18 (1968), 369-521.

[2] L. Hörmander, A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, Math. Ann., 217 (1975), 165-188.

[3] 池田信行，上野正，田中洋，佐藤健一，多次元拡散過程の境界問題(上)，(下)，確率論セミナー，Vol. 5 (1960); Vol. 6 (1961).

[4] 国田寛，多次元拡散過程の境界問題，函数解析的方法に

よる解析学の諸問題の研究, 報告集, 1969年3月,東京.

[5] A. Melin and J. Sjöstrand, Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, Comm. in P. D. E., 1 (1976), 313-400.

[6] K. Sato and T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., 4 (1965), 529-605.

[7] K. Taira, Sur l'existence de processus de diffusion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 29 (1979). To appear.

[8] K. Taira, Un théorème d'existence et d'unicité des solutions pour des problèmes aux limites généraux. To appear.

以上